

А. К. Бахтин

***Частично-конформные отображения в
многомерных комплексных пространствах***

В данной работе результаты статьи [1] распространяются на бесконечномерный случай. В своих исследованиях мы придерживаемся терминологической архитектуры комплексного анализа, разработанного в [2]-[6].

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – соответственно множества натуральных, вещественных и комплексных чисел. $R_+ = [0, +\infty)$. Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ – сфера Римана (расширенная комплексная плоскость), $r(B, a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см. напр. [7]-[10]). По аналогии с пространством \mathbb{C}^n рассмотрим линейное векторное пространство \mathbb{C}^∞ , то есть пространство упорядоченных, счетных последовательностей комплексных чисел. Таким образом \mathbb{C}^∞ есть декартово произведение счетного числа экземпляров комплексной плоскости \mathbb{C} : $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} \times \dots$. Аналогично, $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times \dots$, $\mathbb{R}^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$.

Сформулируем для случая пространства \mathbb{C}^∞ некоторые понятия работы [1].

1. Алгебра \mathbb{C}^∞ .

Определение 1. Бинарную операцию действующую из $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty$ в \mathbb{C}^∞ по правилу

$$\mathbb{Z} \cdot \mathbb{W} = \{z_k w_k\}_{k=1}^\infty, \quad (1)$$

где $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty$, $\mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty$, будем называть *векторным умножением элементов \mathbb{C}^∞* . Данная операция превращает \mathbb{C}^∞ в коммутативную, ассоциативную алгебру [11, 12] с единицей $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1, \dots) \in \mathbb{C}^\infty$.

Обратимыми, относительно так определенной операции умножения, являются те и только те элементы $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty$ у которых $z_k \neq 0$ для всех $k = \overline{1, \infty}$.

Обратными для таких элементов $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^\infty$ являются элементы

$\mathbb{Z}^{-1} = \{z_k^{-1}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$, так как $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}^{-1} = \mathbb{Z}^{-1} \cdot \mathbb{Z} = 1$. Множество Θ всех элементов $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$, у которых хотя бы одна координата $a_k = 0$, назовем множеством необратимых элементов $A \in \mathbb{C}^{\infty}$. Множество Θ является объединением максимальных идеалов алгебры \mathbb{C}^{∞} [13].

По аналогии с конечномерным случаем (см. напр [11], [12]), можно представить \mathbb{C}^{∞} как прямую сумму счетного числа экземпляров алгебры комплексных чисел \mathbb{C} . Структура векторного пространства \mathbb{C}^{∞} полностью согласуется со структурой алгебры \mathbb{C}^{∞} . Обобщим ряд определений работы [1] на случай алгебры \mathbb{C}^{∞} .

2. Сопряжение.

Определение 2. Каждому элементу $\mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ поставим в соответствие векторно – сопряженный элемент $\overline{\mathbb{W}} = \{\overline{w_k}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$, где $\overline{w_k}$ обозначает число комплексно сопряженное w_k в обычном смысле. Так определенное соответствие задает автоморфизм \mathbb{C}^{∞} , оставляющий неподвижным подпространство \mathbb{R}^{∞} .

3. Модуль (векторный). В алгебре \mathbb{C} одним из важнейших является понятие модуля комплексного числа. В работе [1] предложено векторное обобщение данного понятия, распространим его на пространство \mathbb{C}^{∞} . Пусть $\mathbb{R}_+^{\infty} = R_+ \times R_+ \times \dots \times R_+ \dots$.

Определение 3. Векторным модулем произвольного элемента $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ будем называть вектор $|\mathbb{Z}| := \{|z_k|\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}_+^{\infty}$.

Важно, что для произвольного $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$, справедливо равенство

$$\mathbb{Z} \cdot \overline{\mathbb{Z}} = |\overline{\mathbb{Z}}|^2 = |\mathbb{Z}|^2. \quad (2)$$

4. Векторная норма.

Определение 4. Вектор $\mathbb{X} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$ будем называть неотрицательным (строго положительным) и писать $\mathbb{X} \geq \mathbb{O}$ ($\mathbb{X} > \mathbb{O}$), если $x_k \geq 0$ для всех $k = \overline{1, \infty}$ ($x_k > 0$ хотя бы для одного $k = \overline{1, \infty}$), $\mathbb{O} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$.

Определение 5. Будем говорить, что вектор $\mathbb{X} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$ больше либо равен (строго больше) вектора $\mathbb{Y} = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$, если $\mathbb{X} - \mathbb{Y} \geq \mathbb{O}$ ($\mathbb{X} - \mathbb{Y} > \mathbb{O}$).

Данные определения для конечномерных пространств \mathbb{C}^n были даны в работе [1]. В многомерных пространствах ситуация суще-

ственно отличается от случая вещественной прямой, например, вектор $\mathbb{O} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0, \dots)}_{\infty\text{-раз}}$ больше либо равен всех векторов, координаты которых неположительны и меньше либо равен всех векторов из \mathbb{R}_+^∞ .

Остальные векторы \mathbb{R}^∞ у которых координаты разных знаков с вектором \mathbb{O} не сравнимы в смысле определений 4 и 5.

Определение 6. Векторное пространство \mathbb{Y} будем называть векторно нормированным, если каждому $y \in \mathbb{Y}$ сопоставлен неотрицательный вектор $\|y\| \in \mathbb{R}_+^\infty$, удовлетворяющий условиям:

1) $\|y\| \geq \mathbb{O}$, причем $\|y\| = \mathbb{O} \iff y = 0_{\mathbb{Y}}$, ($0_{\mathbb{Y}}$ – нуль пространства \mathbb{Y});

2) $\|\gamma y\| = |\gamma| \|y\|$, $\forall y \in \mathbb{Y}$, $\forall \gamma \in \mathbb{C}$;

3) $\|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$. Аналогично можно ввести понятие векторной метрики. Введенное определение 3 удовлетворяет определению 6. Таким образом векторный модуль является векторной нормой в алгебре \mathbb{C}^∞ : $\|\cdot\| = |\cdot|$. Тогда открытым единичным шаром в алгебре \mathbb{C}^∞ является единичный открытый поликруг $\|z\| < \mathbf{1}$, ($\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$), а единичной сферой – $\mathbb{T}^\infty = \{Z \in \mathbb{C}^\infty : \|Z\| = \mathbf{1}\}$. Важно, что

а) $|Z_1 \cdot Z_2| = \|Z_1 \cdot Z_2\| = \|Z_1\| \|Z_2\| = |Z_1| |Z_2|$, $\forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}^\infty$;

б) $|1| = \|1\| = \mathbf{1}$, ($\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$).

Заметим, что для евклидовой нормы $\|\cdot\|_E$, определяемой соотношением $\|z\|_E = \sum_{k=1}^{\infty} (|z_k|^2)^{\frac{1}{2}}$, справедливо равенство

$$\|1\|_E = \infty.$$

5. Векторный аргумент $a \in \mathbb{C}^\infty$. В дальнейшем вектор (произвольный) пространства (алгебры) \mathbb{C}^∞ будем называть бесконечномерным комплексным числом, а алгебра \mathbb{C}^∞ будет называться алгеброй бесконечномерных комплексных чисел.

Определение 7. Векторным аргументом бесконечномерного комплексного числа $\mathbb{A} = \{a_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty \setminus \Theta$ является бесконечномерный вещественный вектор, определяемый формулой

$$\arg \mathbb{A} = \{\arg a_k\}_{k=1}^\infty,$$

где $\arg a_k$ есть главное значение аргумента, либо то которое вытекает из конкретного смысла задачи в которой фигурирует бесконечномерное комплексное число $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^\infty$.

6. Компактификация \mathbb{C}^∞ .

В качестве компактификации $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} \times \dots$ возьмем пространство $\overline{\mathbb{C}}^\infty = \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \dots \times \overline{\mathbb{C}} \times \dots$, которое по аналогии с конечномерным случаем (см. [2]-[6]) будем называть бесконечномерным пространством теории функций. Бесконечными точками $\overline{\mathbb{C}}^\infty$ являются те точки, у которых хотя бы одна координата бесконечна. Множество всех бесконечных точек имеет коразмерность единица.

Топологию в $\overline{\mathbb{C}}^\infty$ определяем как покоординатную сходимость равномерно по номерам координат.

7. Дифференцируемость. Сначала обратимся к конечномерному случаю. Рассмотрим область $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$ и отображение $\mathbb{F} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^m$, $\mathbb{F} = \{f_k(z_1, \dots, z_n)\}_{k=1}^m$. Пусть $f_k = U_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) + iV_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ – вещественно непрерывно дифференцируемы всюду в области \mathbb{D} при $k = \overline{1, m}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Матрицу Якоби отображения \mathbb{F} , рассматриваемого как дифференцируемое отображение области $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{2n}$ в \mathbb{R}^{2m} (матрица $2m \times 2n$) представим следующим образом

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} U_{x_1}^{(1)} & \dots & U_{x_n}^{(1)} & U_{y_1}^{(1)} & \dots & U_{y_n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \{\mathbb{U}_{\mathbb{X}}\} & \vdots & \vdots & \{\mathbb{U}_{\mathbb{Y}}\} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{x_1}^{(m)} & \dots & U_{x_n}^{(m)} & U_{y_1}^{(m)} & \dots & U_{y_n}^{(m)} \\ \hline V_{x_1}^{(1)} & \dots & V_{x_n}^{(1)} & V_{y_1}^{(1)} & \dots & V_{y_n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \{\mathbb{V}_{\mathbb{X}}\} & \vdots & \vdots & \{\mathbb{V}_{\mathbb{Y}}\} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{x_1}^{(m)} & \dots & V_{x_n}^{(m)} & V_{y_1}^{(m)} & \dots & V_{y_n}^{(m)} \end{array} \right), \quad (3)$$

где $U_{x_j}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x_j} U_k$, $V_{x_j}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x_j} V_k$, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Штрихованные линии разбивают матрицу Якоби (3) на четыре прямоугольные матрицы порядка $m \times n$, обозначенные U_X, U_Y, V_X, V_Y , где $F = ReF + iImF = U + iV, Z = ReZ + iImZ = X + iY$.

С учетом сказанного, матрицу (3) можно представить следующим образом

$$\begin{pmatrix} U_X & U_Y \\ V_X & V_Y \end{pmatrix}, \quad (4)$$

Тогда условия Коши-Римана для отображения F можно записать в виде

$$\begin{cases} U_X = V_Y, \\ U_Y = -V_X. \end{cases} \quad (5)$$

С учетом (5) известное определение голоморфного отображения (см. [2]-[6]) можно представить в следующем виде.

Определение 8. Отображение $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^m$ вещественно непрерывно дифференцируемое в \mathbb{D} (как отображение из \mathbb{R}^{2n} в \mathbb{R}^{2m}) и удовлетворяющее матричному уравнению (5) всюду в \mathbb{D} будем называть голоморфным в области \mathbb{D} . При $n \in \mathbb{N}$ и $m = 1$ получаем определение голоморфной функции в области $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$. В случае $n = 1, m \in \mathbb{N}$ получаем определение голоморфной кривой.

Как известно [2]-[6] голоморфное отображение $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^m, \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$ называется биголоморфным, если оно имеет обратное отображение, голоморфное в области $F(\mathbb{D})$.

Теперь дадим формальное обобщение приведенных выше рассуждений на бесконечномерный случай.

Пусть даны область $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^\infty$ и отображение $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, где $F = \{f_k(Z)\}_{k=1}^\infty = \{f_k(X + iY)\}_{k=1}^\infty, f_k(X + iY) = U_k(X, Y) + iV_k(X, Y) = U_k(\{x_p\}_{p=1}^\infty, \{y_p\}_{p=1}^\infty) + iV_k(\{x_p\}_{p=1}^\infty, \{y_p\}_{p=1}^\infty)$. $F = U + iV, U = U(X, Y) = \{U_k(X, Y)\}_{k=1}^\infty, V = V(X, Y) = \{V_k(X, Y)\}_{k=1}^\infty, Z = X + iY = \{x_k\}_{k=1}^\infty + i\{y_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{D}$.

Пусть функции $U_k(\{x_p\}_{p=1}^\infty, \{y_p\}_{p=1}^\infty), V_k(\{x_p\}_{p=1}^\infty, \{y_p\}_{p=1}^\infty)$ всюду в \mathbb{D} имеют непрерывные частные производные по всем переменным $x_p, y_p, p = \overline{1, \infty}$. Тогда матрицу Якоби представим в виде аналогичном (4)

$$\begin{pmatrix} \mathbb{U}_X & \mathbb{U}_Y \\ \mathbb{V}_X & \mathbb{V}_Y \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\mathbb{U}_X, \mathbb{U}_Y, \mathbb{V}_X, \mathbb{V}_Y$ являются бесконечными матрицами следующего вида $\mathbb{U}_X = [\{U_{x_p}^{(k)}\}_{k=1, p=1}^\infty]$, $\mathbb{U}_Y = [\{U_{y_p}^{(k)}\}_{k=1, p=1}^\infty]$, $\mathbb{V}_X = [\{V_{x_p}^{(k)}\}_{k=1, p=1}^\infty]$, $\mathbb{V}_Y = [\{V_{y_p}^{(k)}\}_{k=1, p=1}^\infty]$, $V_{x_p}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x_p} V_k$, $V_{y_p}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial y_p} V_k$, $U_{x_p}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x_p} U_k$, $U_{y_p}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial y_p} U_k$, $k, p = \overline{1, \infty}$.

В нашем случае, символ $[\cdot]$ обозначает бесконечную матрицу.

Тогда уравнения Коши-Римана примут следующий вид

$$\begin{cases} \mathbb{U}_X = \mathbb{V}_Y, \\ \mathbb{U}_Y = -\mathbb{V}_X. \end{cases} \quad (7)$$

Формально системы (5) и (7) совершенно одинаковы.

Определение 9. Пусть \mathbb{D} является произвольной областью из пространства \mathbb{C}^∞ . Отображение $\mathbb{F} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ вещественно непрерывно дифференцируемое в \mathbb{D} и удовлетворяющее матричному уравнению (7) всюду в \mathbb{D} будем называть голоморфным отображением области \mathbb{D} .

Если $k \geq m$, $f_k(\mathbb{Z}) \equiv 0$, то мы получаем голоморфное отображение $\mathbb{F} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^m$. Если рассмотрим сужение отображения \mathbb{F} на \mathbb{C}^n , то получим голоморфное отображение из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^∞ .

По аналогии с конечномерным случаем, будем считать, что голоморфное отображение $\mathbb{F} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^\infty$ является биголоморфным, если \mathbb{F} имеет обратное отображение, голоморфное в $\mathbb{F}(\mathbb{D})$.

Для того чтоб перенести известные результаты о сходимости степенных рядов, известные для комплексной плоскости \mathbb{C} , в пространство \mathbb{C}^∞ , приведем соответствующий аналог определения равномерной сходимости внутри единичного поликруга некоторой последовательности функций отображений.

Пусть $\mathbb{U}_r^\infty = U_r \times U_r \times \dots \times U_r \times \dots$, где $U_r = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$, $\mathbb{U}_1^\infty := \mathbb{U}^\infty$. $\overline{\mathbb{U}}_r^\infty = \overline{U}_r \times \overline{U}_r \times \dots \times \overline{U}_r \times \dots$, и $\mathbb{F}_p : \mathbb{U}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ — некоторая последовательность отображений.

Определение 10. Будем говорить, что последовательность \mathbb{F}_p , $p = \overline{1, \infty}$ равномерно внутри \mathbb{U}^∞ сходится к некоторому отображению $\mathbb{F}_0 : \mathbb{U}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ и $0 < r < 1$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon, r)$, $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\|\mathbb{F}_p(\mathbb{Z}) - \mathbb{F}_0(\mathbb{Z})\| \leq \varepsilon \cdot \mathbf{1}$$

для всех $\mathbb{Z} \in \overline{\mathbb{U}}_r^\infty$ и всех $p > n_0$.

Определение 11. Голоморфное отображение

$$\mathbb{F} : \mathbb{U}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty, \quad \mathbb{F}(\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} f_1(z_1) \\ f_2(z_2) \\ \vdots \\ f_n(z_n) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad f_k = \sum_{p=0}^{\infty} a_p^{(k)} z_k^p,$$

будем называть аналитической функцией векторного аргумента, если равномерно внутри поликруга \mathbb{U}^∞ сходится ряд

$$\mathbb{F}(\mathbb{Z}) = \sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{A}_p \mathbb{Z}^p, \quad \mathbb{A}_p = \{a_p^{(k)}\}, \quad \mathbb{Z} \in \mathbb{U}^\infty, \quad p, k = \overline{1, \infty}.$$

Аналитические функции векторного аргумента подводят нас к понятию *частично – конформных отображений* в \mathbb{C}^n и \mathbb{C}^∞ .

Определение 12. Пусть $\delta > 0$ – некоторое фиксированное число. Тогда отображение

$$\mathbb{F}(\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} f_1(z_1) \\ f_2(z_2) \\ \vdots \\ f_n(z_n) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Z} \in \mathbb{U}^\infty,$$

где каждое $f_k(z_k)$, $k = \overline{1, \infty}$, является однолистной функцией в единичном круге, такой что $\delta < |f'_k(0)| < \frac{1}{\delta}$, $k = \overline{1, \infty}$, будем называть частично конформным отображением единичного поликруга.

Поясним, что в определении 12 число δ зависит, вообще говоря, от отображения \mathbb{F} , то есть $\delta = \delta(\mathbb{F})$.

Также из определения 12 следует определение частично – конформного отображения в любом пространстве \mathbb{C}^n .

В целом, частично – конформные отображения, вообще говоря, не являются конформными отображениями, однако сужение таких отображений на любую координатную плоскость есть конформным отображением.

8. Представление бесконечномерного комплексного числа в векторно – декартовой форме. Пусть $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \{z_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Re z_k + i Im z_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Re z_k\}_{k=1}^{\infty} + \{i Im z_k\}_{k=1}^{\infty} = \\ &= \{Re z_k\}_{k=1}^{\infty} + i \{Im z_k\}_{k=1}^{\infty} = Re \mathbb{Z} + i Im \mathbb{Z} = X + iY = \\ &= \{x_k\}_{k=1}^{\infty} + i \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty} + i \mathbb{R}^{\infty},\end{aligned}$$

где $X = Re \mathbb{Z} = \{Re z_k\}_{k=1}^{\infty} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $Y = Im \mathbb{Z} = \{Im z_k\}_{k=1}^{\infty} = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$. То есть $\mathbb{C}^{\infty} = \mathbb{R}^{\infty} + i \mathbb{R}^{\infty}$.

9. Представление бесконечномерного комплексного числа в векторно – полярной форме.

Используя вышеприведенные определения, получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \{z_k\}_{k=1}^{\infty} = \{|z_k| e^{i \alpha_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{|z_k|\}_{k=1}^{\infty} \{e^{i \alpha_k}\}_{k=1}^{\infty} \\ &= |\mathbb{Z}| [\cos \arg \mathbb{Z} + i \sin \arg \mathbb{Z}] = |\mathbb{Z}| e^{i \arg \mathbb{Z}},\end{aligned}$$

где

$$\cos \beta = \{\cos \beta_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \sin \beta = \{\sin \beta_k\}_{k=1}^{\infty},$$

$$\exp i \beta = \{\exp i \beta_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \beta = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}, \quad \mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}.$$

Аналогичным образом определяется отображение $\ln \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty} \setminus \Theta$

$$\ln \mathbb{Z} = \ln |\mathbb{Z}| + i \arg \mathbb{Z} = \{\ln |z_k| + i \arg z_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Более того, для регулярной в областях $(B_1, B_2, \dots, B_n, \dots)$, $B_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, \infty}$ функции $F(z)$ комплексного переменного определим продолжение этой функции до голоморфного отображения области $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \times \dots$ по следующему правилу

$$\mathbb{F}(\mathbb{W}) = \{F(W_k)\}_{k=1}^\infty, \quad \mathbb{W} = \{w_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{B}.$$

Приведем примеры частично – конформных отображений, заданных элементарными функциями.

1) Дробно – линейная функция определяется соотношением

$$T = \frac{\mathbb{A}_1 \mathbb{Z} + \mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_3 \mathbb{Z} + \mathbb{A}_4}, \quad \mathbb{Z} \neq -\frac{\mathbb{A}_4}{\mathbb{A}_3},$$

где $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4$ – фиксированные комплексные числа, а $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^\infty$ – комплексное переменное.

2) $W = \mathbb{Z}^n = \{z_k^n\}_{k=1}^\infty$, где n – натуральное число, – степенная функция, голоморфна во всей плоскости $\overline{\mathbb{C}}^\infty$.

3) $W = \frac{1}{2}(\mathbb{Z} + \frac{1}{\mathbb{Z}})$ – функция Жуковского, голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}^\infty \setminus \Theta$.

4) $\mathbb{P}_n(\mathbb{Z}) = \sum_{k=0}^n \mathbb{A}_k \mathbb{Z}^k$ – полином, $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^\infty$.

5) $\frac{1}{\mathbb{Z} - \mathbb{Z}_0}$, $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}_0 \in \mathbb{C}^\infty \setminus \Theta$.

6) $\exp \mathbb{Z} = \{e^{z_k}\}_{k=1}^\infty = 1 + \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathbb{Z}^k + \dots$, $\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^\infty$.

7) $(1 - \mathbb{Z})^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\mathbb{Z} + \frac{1}{8}\mathbb{Z}^2 - \dots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}\mathbb{Z}^k - \dots$, $\mathbb{Z} \in \mathbb{U}^\infty = \{\mathbb{Z} : \|z\| < 1\}$.

10. Полицилиндрическая теорема Римана об отображении в $\overline{\mathbb{C}}^\infty$.

Означим области гиперболического типа как в пункте 10 [1]. Область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется областью гиперболического типа, если ∂B (граница B) – связное множество, содержащее более одной точки.

Пусть $0 < \delta \leq 1$ и $\mathbb{A} = \{a_k\}_{k=1}^\infty \in \overline{\mathbb{C}}^\infty$. Тогда $\mathbb{B} = \mathbb{B}(\delta) = \mathbb{B}_\delta(\mathbb{A}) = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \times \dots \subset \overline{\mathbb{C}}^\infty$, $\mathbb{A} \in \mathbb{B}_\delta(\mathbb{A})$, где каждая область B_k является областью гиперболического типа, $\delta < r(B_k, a_k) < \frac{1}{\delta}$, $k = \overline{1, \infty}$. При любом $0 < \delta \leq 1$ область $\mathbb{B}(\delta) = \mathbb{B}_\delta(\mathbb{A})$ называется

конечной относительно \mathbb{A} полицилиндрической областью гиперболического типа.

Аналогично [1] сформулируем утверждение непосредственно вытекающее из классической теоремы Римана об отображении односвязной области гиперболического типа на единичный круг.

Теорема Римана. Пусть $\mathbb{A} \in \overline{\mathbb{C}}^\infty$ и $0 < \delta \leq 1$. Тогда любая конечная относительно \mathbb{A} полицилиндрическая область $\mathbb{B} = \mathbb{B}_\delta(\mathbb{A}) \subset \overline{\mathbb{C}}^\infty$ гиперболического типа биголоморфно эквивалентна единичному поликругу $\mathbb{U}^\infty = \{\mathbb{W} \in \mathbb{C}^\infty : \|\mathbb{W}\| < 1\}$.

Пусть $\mathbb{B} = \mathbb{B}(\delta) = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \times \dots$ – область указанная в теореме Римана, $\mathbb{A} = \{a_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{B}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, \infty}$ и $w_k = f_k(z_k)$ – голоморфная в B_k функция, однолистно и конформно отображающая область B_k , $k = \overline{1, \infty}$ на единичный круг $|w_k| < 1$ так, что $f(a_k) = 0$, $f'(a_k) > 0$.

Тогда биголоморфное отображение $\mathbb{F}_\mathbb{B}(\mathbb{Z}) = \{f_k(z_k)\}_{k=1}^\infty$, $\mathbb{F}'_\mathbb{B}(\mathbb{Z}) = \{f'_k\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяет условиям нормировки

$$\mathbb{F}_\mathbb{B}(\mathbb{A}) = \mathbb{O}, \quad \mathbb{F}'_\mathbb{B}(\mathbb{A}) = \{f'_k(a_k)\}_{k=1}^\infty > \mathbb{O}$$

и будет единственным таким отображением на единичный поликруг. Тогда обратное отображение к отображению $\mathbb{F}_\mathbb{B}(\mathbb{A})$ является частично-конформным отображением единичного поликруга.

Итак, в алгебре \mathbb{C}^∞ норма определена равенством $\|\mathbb{Z}\| := |\mathbb{Z}|$. Метрика (векторная) в \mathbb{C}^∞ задается обычным образом: $\rho(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2) = \|\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2\|$. Назовем так определенные (векторные) норму и метрику полицилиндрическими. Сходимость по полицилиндрической норме равномерно по номерам задается соотношением $\mathbb{Z}_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0 \iff \|\mathbb{Z}_p\| \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \mathbb{O} = (0, 0, \dots, 0, \dots) \iff |z_p^{(k)}| \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0, \forall k = \overline{1, \infty}$. (Знак " \Rightarrow " обозначает равномерную сходимость по $k = \overline{1, \infty}$.)

11. Приложения. В связи с бесконечномерной теоремой Римана об отображении рассмотрим полицилиндрический аналог известного класса S из теории однолистных функций [7] – [10].

Определение 13. Классом $S^{(\infty)}$ назовем совокупность всех биголоморфных отображений единичного поликруга $\mathbb{U}^\infty = \{\mathbb{Z} \in \mathbb{C}^\infty :$

$\|\mathbb{Z}\| < 1\}$ вида $\mathbb{F}(\mathbb{Z}) = \{f_k(z_k)\}_{k=1}^\infty$, где $f_k \in S$, $k = \overline{1, \infty}$, $\mathbb{Z} = \{z_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{U}^\infty$.

Ясно, что для $\mathbb{Z} \in \overline{\mathbb{U}}^\infty(r) := \{\|\mathbb{Z}\| \leq r < 1\}$, $0 < r < 1$, равномерно и абсолютно сходится ряд

$$\mathbb{F}(\mathbb{Z}) = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{A}_k \mathbb{Z}^k = \sum \begin{pmatrix} a_k^{(1)} \\ a_k^{(2)} \\ \vdots \\ a_k^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ \vdots \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \sum a_k^{(1)} z_1^k \\ \sum a_k^{(2)} z_2^k \\ \vdots \\ \sum a_k^{(n)} z_n^k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(z_1) \\ f_2(z_2) \\ \vdots \\ f_n(z_n) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Для произвольного отображения $\mathbb{F} \in \mathbb{S}^{(\infty)}$ справедливо неравенство

$$\frac{\|\mathbb{Z}\|}{(1 + \|\mathbb{Z}\|)^2} \leq \|\mathbb{F}(\mathbb{Z})\| \leq \frac{\|\mathbb{Z}\|}{(1 - \|\mathbb{Z}\|)^2},$$

где $\|\mathbb{Z}\| = r$, $0 \leq r < 1$.

Теорема 2. Для произвольного отображения $\mathbb{F} \in \mathbb{S}^{(\infty)}$ справедливо неравенство

$$\frac{\|1 - \mathbb{Z}\|}{(1 + \|\mathbb{Z}\|)^3} \leq \|\mathbb{F}'(\mathbb{Z})\| \leq \frac{\|1 + \mathbb{Z}\|}{(1 - \|\mathbb{Z}\|)^3},$$

где $\|\mathbb{Z}\| = r$, $0 \leq r < 1$, $k = \overline{1, \infty}$.

Теорема 3. (Теорема Бибераха) Если $\mathbb{F} \in \mathbb{S}^{(\infty)}$, тогда

$$|\mathbb{A}_n| \leq n \cdot \mathbf{1} = n,$$

где $\mathbb{F} = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{A}_k \mathbb{Z}^k$, $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$. Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $\mathbb{F} = \{f_k\}_{k=1}^\infty$, $f_k^0 = z_k(1 - e^{i\theta} z_k)^{-2}$, $\theta_k \in [0, 2\pi]$, $k = \overline{1, \infty}$.

12. Некоторые задачи о неналегающих областях в $\overline{\mathbb{C}}^\infty$.

Перенесем результат М.А. Лаврентьева о максимуме произведения конформных радиусов двух неналегающих областей в пространство $\overline{\mathbb{C}}^\infty$. Пусть \mathbb{B}_1 и \mathbb{B}_2 – две полицилиндрические области в $\overline{\mathbb{C}}^\infty$, причем $\mathbb{B}_1 = B_1^{(1)} \times B_2^{(1)} \times B_3^{(1)} \times \dots \times B_n^{(1)} \times \dots$, $\mathbb{B}_2 = B_1^{(2)} \times B_2^{(2)} \times B_3^{(2)} \times \dots \times B_n^{(2)} \times \dots$, где $B_k^{(s)} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, \infty}$, $s = \overline{1, 2}$ – произвольные многосвязные области. Пусть $\mathbb{A}_1 \in \mathbb{B}_1$, $\mathbb{A}_2 \in \mathbb{B}_2$.

Обобщенным внутренним радиусом полицилиндрической области \mathbb{B} в точке \mathbb{A} ($\mathbb{A} \in \mathbb{B}$) будем называть неупорядоченный набор чисел $\{r(B_k, a_k)\}_{k=1}^\infty$. Для удобства числа $r(B_k, a_k)$ будем располагать в порядке координатных областей

$$\mathbb{R}(\mathbb{B}, \mathbb{A}) = \begin{pmatrix} r(B_1, a_1) \\ \dots \\ r(B_n, a_n) \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим класс пар полицилиндрических областей $\Lambda(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2)$, который содержит пары полицилиндрических областей, для которых набор координатных областей $\{B_k^s\}$, $k = \overline{1, \infty}$ при каждом фиксированном $s = \overline{1, 2}$ является системой неналегающих областей на $\overline{\mathbb{C}}$. На классе $\Lambda(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2)$ запишем следующий функционал

$$\mathbb{J} = \mathbb{R}(\mathbb{B}_1, \mathbb{A}_1) \cdot \mathbb{R}(\mathbb{B}_2, \mathbb{A}_2). \quad (8)$$

Задача. На классе $\Lambda(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2)$ для фиксированных точек $\mathbb{A}_1 = \mathbb{O}$ и $\mathbb{A}_2 = \infty$ определить максимум функционала (8) и описать все экстремали.

Теорема 4. (А.К. Бахтин, И.В. Денега) На классе областей $\Lambda(\mathbb{O}, \infty)$ справедливо неравенство

$$\mathbb{R}(\mathbb{B}_1, \mathbb{O}) \cdot \mathbb{R}(\mathbb{B}_2, \infty) \leq 1,$$

причем знак равенства в этом неравенстве достигается для областей: $\mathbb{B}_1 = \mathbb{U}^\infty$ и \mathbb{B}_2 – образ \mathbb{B}_1 при частично-конформном отображении

области \mathbb{B}_1 с помощью функции $\mathbb{F} = \frac{1}{\mathbb{Z}}$. ($\mathbb{O} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$, $\infty = (\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$).

Список литературы

- [1] Бахтин А.К. *Обобщение некоторых результатов теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства* // Доп. НАН України. – 2011. – № 3. – С. 7 – 11.
- [2] Шабат Б. В. *Введение в комплексный анализ*, Ч. I. – М.: «Наука», 1976. – 320 с.
- [3] Шабат Б. В. *Введение в комплексный анализ*, Ч. II. – М.: «Наука», 1976. – 400 с.
- [4] Фукс Б. В. *Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных*, Физматгиз, 1962. – 420 с.
- [5] Фукс Б. В. *Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных*, Физматгиз, 1963. – 428 с.
- [6] Чирка Е. М. *Комплексные аналитические множества*. – М.: «Наука», 1985. – 272 с.
- [7] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. – М: «Наука», 1966. – 628 с.
- [8] Хейман В.К. *Многолистные функции*. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
- [9] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в задачах о неналегающих областях* // Мат. сб. – 1985. – **128**, № 1. – С. 110 – 123.
- [10] Дубинин В. Н. *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*. // Владивосток "Дальнаука" ДВО РАН – 2009. – 390с.
- [11] Кантор И. Л., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа*. – М.: «Наука», 1973. – 143 с.
- [12] Б. Л. ван дер ВАРДЕН. *Алгебра* – М.: «Наука», 1976. – 648 с.

- [13] Рудин У. *Функциональный анализ*, – Изд. "Мир Москва. – 1975. – 449 с.
- [14] Шилов Г. Е. *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*, – М.: «Наука». – 1969. – 432 с.